

雑音と入力は無相関性を利用した部分空間同定法*

岡田 昌史**・山上 誠**・杉江 俊治**

Subspace State-Space System Identification Using Uncorrelation of Input Signals and Noises*

Masafumi OKADA**, Makoto YAMAGAMI** and Toshiharu SUGIE**

In this paper, we propose a subspace state-space system identification method considering noise attenuation. In this method, we achieve noise attenuation based on the uncorrelation between input signals and noises, where a large amount of data can be handled with the prescribed size matrices. An illustrative numerical example is given to show the effectiveness of the proposed method.

1. はじめに

近年、状態空間モデルを直接求める部分空間同定法 (Subspace State-Space System IDentification 以下 4SID 法と記す) が注目されている¹⁾。この方法は多入出力系にも応用が可能であることから、従来の予測誤差法にかわる同定法として多くの研究が報告されている³⁾⁻¹¹⁾。しかし一方、この方法は雑音に対して敏感であり、小さな雑音に対しても正しい結果が得られにくいといった欠点がある。そこで De Moor ら⁴⁾は、カルマンフィルタによる状態推定値を先に求め、これに基づいて状態空間法における係数行列 (A, B, C, D) を求める部分空間同定法を提案している。しかし、この方法では推定値の精度を上げるためにはデータ数を大きくとらなければならないため、取り扱う行列のサイズは一般に非常に大きくなり、計算機への負担は大きい。これより、計算をおこなう前に雑音の影響を小さくし、しかもデータの情報を落とすことなく扱う行列の大きさを小さくするといった工夫が必要と考えられる。

そこで本論文では、雑音と入力信号が無相関であることを陽に用いて、雑音の影響をあらかじめ軽減化、さらに取り扱う行列の大きさを圧縮することにより計算量を小さくする方法を提案する。また、数値例によってその

有効性を検証する。

本論文で用いる記号を定義する。 A/B は行列 A の B の行空間への射影を意味し、

$$A/B = AB^T(BB^T)^{-1}B$$

で与えられる。また、 A^\perp は

$$\text{Image}(A^\perp) = A^\perp$$

を満たす行列とする。ここで、 A^\perp は $\text{Image}(A)$ の直交補空間を表す。さらに、 A^+ は A の一般化逆行列、 $\|\cdot\|$ はフロベニウスノルムを意味し、 $A(i:j,k:\ell)$ は A の i から j 行、 k から ℓ 列よりなる部分行列、 $A(i:j,:)$ は A の i から j 行よりなる部分行列を意味するものとする。

2. 問題設定

本論文では、次の状態方程式で表される m 入力 ℓ 出力、 n 次のシステムを考える。

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + w_k \\ y_k = Cx_k + Du_k + v_k \end{cases} \quad (1)$$

ここで、 $x_k \in \mathbf{R}^n$ は状態ベクトル、 $u_k \in \mathbf{R}^m$ は入力信号、 $y_k \in \mathbf{R}^\ell$ は出力信号である。また、 w_k, v_k は雑音であり、平均が 0 で分散がそれぞれ σ_w^2, σ_v^2 に従う白色雑音とする。さらに、これらは入力 u_k と相関がないものとする。すなわち、

* 原稿受付 1996年3月28日

** 京都大学 大学院 工学研究科 Faculty of Engineering, Kyoto University; Uji, Kyoto 611, JAPAN

Key Words: system identification, noise attenuation, subspace based identification, state-space formulation, singular value decomposition.

$$\begin{cases} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N w_{k+i} u_k^T = 0 \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N v_{k+i} u_k^T = 0 \end{cases} \quad (2)$$

がすべての整数 i で成り立つことを仮定する。このとき、 x_k, y_k は入力 u_k による確定的な部分 x_k^d, y_k^d と雑音による確率的な部分 x_k^s, y_k^s にわけることができ、次式が成り立つ。

$$x_k = x_k^d + x_k^s, \quad y_k = y_k^d + y_k^s \quad (3)$$

$$x_{k+1}^d = Ax_k^d + Bu_k, \quad x_{k+1}^s = Ax_k^s + w_k \quad (4)$$

$$y_{k+1}^d = Cx_{k+1}^d + Du_{k+1}, \quad y_{k+1}^s = Cx_{k+1}^s + v_{k+1} \quad (5)$$

このとき、本論文の目的は雑音を含む入出力データ ($u_k, y_k; k=1, 2, \dots$) から (1) 式と同値なシステム

$$(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}) := (T^{-1}AT, T^{-1}B, CT, D) \quad (6)$$

を求めることにある。ただし、 $T \in \mathbf{R}^{n \times n}$ はのちに定まる適当な正則な行列である。また、以下では簡単のため $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}$ を単に A, B, C, D と記述する。

3. 4SID 法

3. では 4SID 法²⁾ について簡単に説明し、その問題点を指摘する。

3.1 入出力方程式

まず、4SID 法の基本式を導出する。(1) 式より

$$y_k = Cx_k + Du_k + v_k \quad (7)$$

$$y_{k+1} = CAx_k + Du_{k+1} + CBu_k + v_{k+1} \quad (8)$$

⋮

$$y_{k+i-1} = CA^{i-1}x_k + Du_{k+i-1} + \sum_{j=2}^i CA^{i-j}Bu_{k+i-j} + v_{k+i-1} \quad (9)$$

が成り立ち、この関係を用いると

$$Y = \Gamma X^d + HU + S \quad (10)$$

$$S := \Gamma X^s + V \quad (11)$$

が成り立つ。ただし、 S は雑音を表す項で、

$$Y := \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_i & y_{i+1} & \cdots & y_{i+N-1} \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$X^d := \begin{bmatrix} x_1^d & x_2^d & \cdots & x_N^d \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\Gamma := \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{i-1} \end{bmatrix}, \quad H := \begin{bmatrix} D & & 0 \\ CB & D & \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ CA^{i-1}B & \cdots & \cdots & D \end{bmatrix} \quad (14)$$

であり、 U, V は Y と同様に u_k, v_k より定義されるブロックハンケル行列、 X^s は X^d と同様に x_k^s によって定義される行列である。また、 $i (> n)$ は設計パラメータであり、 N はデータ数に依存する値である。ここで、

$$\text{rank}(U) = mi \quad (15)$$

を仮定する。

3.2 同定法

(10) 式において Y を U と U^\perp の行空間に射影することを考える。このとき、

$$Y/U = \Gamma X^d/U + HU + S/U \quad (16)$$

$$Y/U^\perp = \Gamma X^d/U^\perp + S/U^\perp \quad (17)$$

となり、雑音が小さければ

$$\|\Gamma X^d/U + HU\| \gg \|S/U\| \quad (18)$$

$$\|\Gamma X^d/U^\perp\| \gg \|S/U^\perp\| \quad (19)$$

が成り立つ。このとき、 Γ は拡大可観測行列であり、 X^d はシステムの状態変数を並べた行列であるので

$$\text{rank} \Gamma = n, \quad \text{rank} X^d = n \quad (20)$$

が成り立ち、さらに (15) 式の仮定から

$$\text{rank}(\Gamma X^d/U^\perp) = n \quad (21)$$

となるので、(17) 式からシステムの次数と Γ が求められ、 C, A が同定可能となる。さらに、 Γ を用いて (16) 式から B, D が求められる。詳しいアルゴリズムについては付録に記す。しかし、雑音小さくない場合、(18)~(20) 式が成り立たないため正しい同定を行うことは難しい。このような場合は (10) 式においてあらかじめ雑音項である S を小さくするような工夫が必要と考えられる。

4. 提案法

前述のように、4SID 法は雑音の存在により正しい結果が得られにくくなる。そこで 4. では、入力信号と雑音の無相関性を利用することにより (10) 式よりあらかじめ確率的な要素 S を取り除く方法を提案し、これにより扱う行列の大きさが小さくなることを示す。

4.1 同定法

まず, (12) 式と同様にある α に対して次の行列を定義する.

$$Y_\alpha := \begin{bmatrix} y_{\alpha+1} & y_{\alpha+2} & \cdots & y_{\alpha+N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{\alpha+i} & y_{\alpha+i+1} & \cdots & y_{\alpha+i+N-1} \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\bar{U} := \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{\alpha+i} & u_{\alpha+i+1} & \cdots & u_{\alpha+i+N-1} \end{bmatrix} \quad (23)$$

さらに, Y_α と同様に U_α, V_α を定義し (13) 式と同様に X_α^d, X_α^s を定義すると

$$Y_\alpha = \Gamma X_\alpha^d + H U_\alpha + S_\alpha \quad (24)$$

$$S_\alpha := \Gamma X_\alpha^s + V_\alpha \quad (25)$$

が成り立つ. このとき (24) 式に対して右から $1/N \cdot \bar{U}^T$ をかけることを考える. このとき, y_k, x_k^d は u_k と相関があり v_k, w_k は u_k と無相関であることから, N が十分大きければ

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{N} Y_\alpha \bar{U}^T \right\| &\neq 0, & \left\| \frac{1}{N} X_\alpha^d \bar{U}^T \right\| &\neq 0 \\ \left\| \frac{1}{N} U_\alpha \bar{U}^T \right\| &\neq 0, & \left\| \frac{1}{N} S_\alpha \bar{U}^T \right\| &\simeq 0 \end{aligned} \quad (26)$$

となる. 実際 (2) 式より

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left\| S_\alpha \bar{U}^T \right\| \rightarrow 0 \quad (27)$$

が成り立つ. これより $N \rightarrow \infty$ で (24) 式は

$$\hat{Y} = \Gamma \hat{X} + H \hat{U} + \hat{S} \quad (28)$$

$$\hat{Y} := \frac{1}{N} Y_\alpha \bar{U}^T, \hat{X} := \frac{1}{N} X_\alpha^d \bar{U}^T, \hat{U} := \frac{1}{N} U_\alpha \bar{U}^T \quad (29)$$

$$\hat{S} := \frac{1}{N} S_\alpha \bar{U}^T \rightarrow 0 \quad (30)$$

と書き換えられ, 雑音が軽減化された入出力方程式が導かれる. 従来法では (10) 式の入出力方程式に基づき Y, U を用いて同定を行ったが, (28) 式の入出力方程式に基づいて同定を行えば雑音の影響を軽減した結果が得られる. これは, 従来の 4SID 法は実験によって得られたデータに対してそのまま計算を行っていたのに対し, 提案手法では雑音除去を目的とした古典的な統計的手法を利用していることに相当する. これにより, 従来法ではやや非現実的な行列計算を要求していたが, 提案法では行列を圧縮し, 計算を容易にすることが可能となっているが, これについては 4.2 で述べる.

4.2 考察

4.2.1 \bar{U} の意味について

ここで, (24) 式に $1/N \cdot \bar{U}^T$ をかけたことについて述べる. (24) 式から雑音項を小さくすることを目的とすれば

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left\| S_\alpha Z^T \right\| = 0 \quad (31)$$

を満たす任意の行列 Z をかけることによって雑音項を小さくすることは達成される. しかし, 同定のためには $Y_\alpha, X_\alpha^d, U_\alpha$ の項は残さなければならないため

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left\| Y_\alpha Z^T \right\| \neq 0, \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left\| X_\alpha^d Z^T \right\| \neq 0 \quad (32)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left\| U_\alpha^d Z^T \right\| \neq 0 \quad (33)$$

が満たされなくてはならない. これより, $Y_\alpha, X_\alpha^d, U_\alpha$ とは相関を持ち, S_α とは相関を持たない \bar{U} を用いることで雑音部分のみを小さくすることを目的としている.

4.2.2 行列の圧縮

従来の 4SID 法では (A1) 式の QR 分解における行列は

$$\begin{bmatrix} U \\ Y \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{(m+\ell)l \times N} \quad (34)$$

であるため, データ数を増やし $N \rightarrow \infty$ とすれば行列の列の大きさは非常に大きくなり計算機への負担は膨大なものとなる. 一方提案手法での QR 分解すべき行列は

$$\begin{bmatrix} \hat{U} \\ \hat{Y} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{(m+\ell)l \times (\alpha+i)} \quad (35)$$

となり, 列の数を定める設計パラメータ α は N とは独立に選べるため $N \rightarrow \infty$ においても計算量はあまり大きくならない. データの情報すべてを用いた方法となっている. また, De Moor らによって提案された方法⁴⁾も (A1) 式と同様の大きさの QR 分解を行うため, データが増えればそれだけ計算機への負担は大きくなる.

4.2.3 システムのインパルス応答の生成

一般にシステムのインパルス応答を求めることは意味のあることである. ここで, 提案手法ではシステムのインパルス応答列が容易に得られることを示す. 入力として平均 0 分散 $\sigma_u^2 I_m$ の白色信号を用い, 初期状態 $x_1 = 0$ の場合を考える. このとき仮定より次式が成り立つ.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u_{j+k} u_k^T = \begin{cases} \sigma_u^2 I_m & (j=0) \\ 0 & (j \neq 0) \end{cases} \quad (36)$$

ただし, I_m は m 次の単位行列である. さて, ここで $1/N \cdot Y_\alpha \bar{U}^T$ について考察する. $y_{\alpha+1}$ は

$$y_{\alpha+1} = Du_{\alpha+1} + \sum_{k=1}^{\alpha} CA^{\alpha-k} Bu_k + v_{\alpha+1} + \sum_{k=1}^{\alpha} CA^{\alpha-k} w_k \quad (37)$$

と表せることから、 $1/N \cdot Y_{\alpha} \bar{U}^T$ の 1 から ℓ 行 1 列要素は、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N} \begin{bmatrix} y_{\alpha+1} & \cdots & y_{\alpha+N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ u_N^T \end{bmatrix} \\ &= D \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u_{\alpha+k} u_k^T \\ &+ \sum_{j=0}^{\alpha-1} \left\{ CA^{\alpha-j-1} B \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u_{j+k} u_k^T \right\} \\ &+ \sum_{j=1}^{N-1} \left\{ CA^{\alpha+j-1} B \frac{1}{N} \sum_{k=j+1}^{N-j} u_{k-j} u_k^T \right\} + S \quad (38) \\ &\simeq \sigma_u^2 \cdot CA^{\alpha-1} B \quad (N \rightarrow \infty) \quad (39) \end{aligned}$$

となる。ただし、 S は雑音に関する項であり、

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S \rightarrow 0 \quad (40)$$

を用いた。これをすべての行・列に拡張すると、

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} Y_{\alpha} \bar{U}^T \simeq \sigma_u^2 \begin{bmatrix} CA^{\alpha-1} B & \cdots & D & & 0 \\ CA^{\alpha} B & \cdots & CB & D & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots \\ CA^{\alpha+i-2} B & \cdots & CA^{i-2} B & CA^{i-3} & \cdots & D \end{bmatrix} \quad (41)$$

となり、これはマルコフパラメータからなるブロックテプリッツ行列で、このシステムのインパルス応答を時間を逆にしてならべた行列となる。

4.2.4 閉ループ同定への応用

閉ループ同定では一般にフィードバック補償器の影響により、システムの入力信号と雑音が相関を持つ。そのため、提案手法をそのまま適用しても (27) 式が成り立たず、雑音の軽減化は達成されない。しかし、ここで \bar{U} を用いたのは 4.2.1 の考察によるものであることを考えれば、 \bar{U} のかわりに同定のための参照入力 r によって構成される R を用いれば、一般に参照入力と雑音は相関を持たないため、(31)~(33) 式が満たされるので、雑音を軽減化した同定が行える。

5. 数値例

つぎに、提案法の有効性を数値例によって検証する。5. では次式の伝達関数で表されるシステムを同定対象とす

る。

$$P = 3.11 \times 10^{-2} \times \frac{(z+0.20)(z-0.95)(z-1.03)(z+2.78)}{(z-0.61)(z-0.82)^2(z-0.86)^2} \quad (42)$$

このシステムに対し入力として M 系列信号を加え、16,000 個のデータを用いて提案法と従来法²⁾の両方によって同定を行う。ただし、入力端には入力信号との SN 比が 0.29 の白色雑音を加え、出力端には出力信号との SN 比が 0.13 の白色雑音を加えた。また、従来法では使用した計算機のメモリの関係で、1,000 個のデータしか用いることができなかつた。このときの、(A4) 式の特異値の値を Table 1 に示す。表より σ_1 から σ_4 の変化に対し、 σ_5 から σ_{10} までの変化は十分小さいので、提案手法、従来法ともに 4 次のシステムとして同定した。同定対象 P と同定されたモデルのインパルス応答を Fig. 1 に示す。さらに、パルス伝達関数の周波数応答を Fig. 2 に示す。提案手法のほうがシステムを正しく表現できているようすが

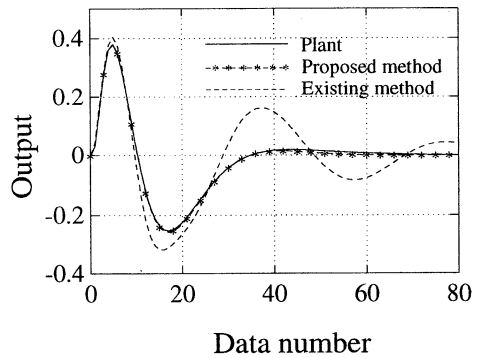


Fig. 1 Impulse responses

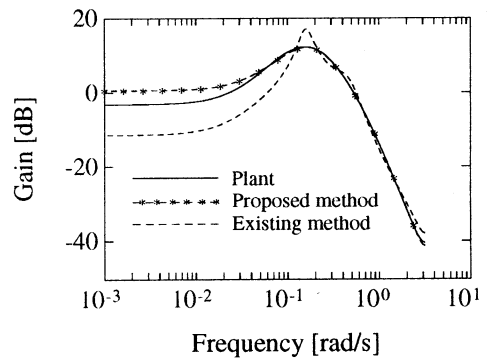


Fig. 2 Frequency responses

Table 1 Singular values

	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	...	σ_{10}
Existing method	83.2	50.8	15.6	5.74	4.89	...	4.56
Proposed method	2.62	1.53	0.46	0.061	0.021	...	0.015

うかがえる。これより本設計法の有効性が確認できる。

付 録

6. おわりに

本論文では、ノイズの低減化を考慮した部分空間同定法を提案した。この方法は雑音と入力信号が相関を持たないことを陽に用いた方法であり、データ数が大きい場合にも扱う行列の大きさを圧縮し計算機の負担を軽減することが可能となった。また、提案手法の有効性を数値例によって検証した。

参考文献

- 1) B. De Moor and P. Van Overschee: *Numerical Algorithms for Subspace State Space System Identification, Trends in Control, A European Perspective*, (A. Isidori, Eds.), Springer, pp. 385-422 (1995)
- 2) M. Verhaegen and P. Dewilde: Subspace model identification Part 1. The output-error state-space model identification class of algorithms; *Int. J. Contr.*, Vol. 55, No. 5, pp. 1187-1210 (1992)
- 3) M. Verhagen: Identification of the deterministic part of MIMO state space models given in innovations form in-out-output data; *Automatica*, Vol. 30, No. 1, pp. 61-74 (1994)
- 4) P. V. Overschee and B. De Moor: N4SID: Subspace algorithms for the identification of combined deterministic-stochastic system; *Automatica*, Vol. 30, No. 1, pp. 75-93 (1994)
- 5) M. Moonen, B. De Moor, L. Vandenberghe and J. Vandewalle: On- and off-line identification of linear state-space models; *Int. J. Contr.*, Vol. 49, No. 1, pp. 219-232 (1989)
- 6) B. Wahlberg and M. Jansson: 4SID linear regression; *Proc. of 33rd CDC*, pp. 2858-2863 (1994)
- 7) T. McKelvey and H. Akçay: System identification with periodic excitation signals: A subspace based algorithm; *Proc. of 3rd ECC*, pp. 423-428 (1995)
- 8) 小川, 永田, 足立: 状態空間モデル同定法“4SID法”の高精度化について; 第24回制御理論シンポジウム資料, pp. 387-390 (1995)
- 9) P. V. Overschee and B. De Moor: A unifying theorem for three subspace system identification algorithms; *Automatica*, Vol. 31, No. 12, pp. 1853-1864 (1995)
- 10) P. V. Overschee and B. De Moor: Choice of state-space basis in combined deterministic - stochastic subspace identification; *Automatica*, Vol. 31, No. 12, pp. 1877-1883 (1995)
- 11) M. Viberg: Subspace-based method for the identification of linear time - invariant systems; *Automatica*, Vol. 31, No. 12, pp. 1835-1851 (1995)

4SID法のアプローチ

Step 1

Y, U よりつぎのQR分解を行う。

$$\begin{bmatrix} U \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & 0 \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A1})$$

このとき, (16), (17) 式の射影は次式で与えられる。

$$Y/U = R_{21}R_{11}^{-1}U \quad (\text{A2})$$

$$Y/U^\perp = R_{22}Q_2 \quad (\text{A3})$$

Step 2

(21) 式の関係から, R_{22} を

$$R_{22} = \begin{bmatrix} U_n & U_n^\perp \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix} \quad (\text{A4})$$

$$S_1 := \text{diag}\{\sigma_1 \ \sigma_2 \ \dots \ \sigma_n\} \quad (\text{A5})$$

$$S_2 := \text{diag}\{\sigma_{n+1} \ \sigma_{n+1} \ \dots \ \sigma_{i\ell}\} \quad (\text{A6})$$

と特異値分解し,

$$\sigma_n \gg \sigma_{n+1} \quad (\text{A7})$$

が成り立てば

$$U_n = \Gamma \quad (\text{A8})$$

とみなすことができる。これにより

$$C = U_n(1:\ell,:) \quad (\text{A9})$$

$$A = [U_n(1:(i-1)\ell,)]^\dagger U_n(\ell+1:i\ell,:) \quad (\text{A10})$$

より C, A が求められる。

Step 3

(16) 式と (A2) 式から

$$(U_n^\perp)^\top R_{21}R_{11}^{-1} = (U_n^\perp)^\top H \quad (\text{A11})$$

となるので,

$$\Xi := (U_n^\perp)^\top R_{21}R_{11}^{-1} \quad (\text{A12})$$

とおけば,

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \Xi(:, 1:m) \\ \Xi(:, m+1:2m) \\ \vdots \\ \Xi(:, (i-1)m:im) \end{bmatrix} = \\
 & \begin{bmatrix} U_n^\perp(1:\ell, :)^T & \cdots & U_n^\perp((i-1)\ell+1:i\ell, :)^T \\ U_n^\perp(\ell+1:2\ell, :)^T & & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ U_n^\perp((i-1)\ell+1:i\ell, :)^T & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\
 & \times \begin{bmatrix} I_\ell & 0 \\ 0 & U_n(1:(i-1)\ell, :) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D \\ B \end{bmatrix} \quad (\text{A13})
 \end{aligned}$$

の関係より D , B が求められる。ただし, I_ℓ は ℓ 次の単位行列である。