システム制御情報学会論文誌, Vol. 6, No. 12, pp. 543〜551, 1993

論　文

並列倒立振子システムの H^∞ 制御*

杉 江 俊 治**・岡 田 昌 史**

H^∞ Control of a Parallel Inverted Pendulum System*

Toshiharu SUGIE** and Masafumi OKADA**

It is important to verify the effectiveness of various control design methods by experiment. For this purpose, first, this paper proposes a new type of parallel inverted pendulum system for experimental use, whose controllability can be easily changed. Second, we analyze how the system characteristics depends on its physical parameters from the viewpoint of robust stability and controllability. Third, a two-degree-of-freedom controller is designed for the system based on the H^∞ loop shaping design procedure. Finally, we evaluate the effectiveness of the controller by experiments, which includes the comparison with LQ optimal control method.

1. はじめに

従来より，制御方式の有効性の実験検証や制御工学の教育のための装置として広く用いられているものの一つに倒立振子がある[1)~7)]．従来の倒立振子は，一つの振子を一つのアクチュエータで制御するタイプのものが標準的であるが，これは制御が比較的容易であり，系のパラメータ（振子の長さ・質量など）を変更してもそれほど制御の容易さは変化しない．しかし，制御方式の有効性の実験検証という観点からすれば，制御性（安定化補償器を実際に見つけることの容易性など）の変更が可能であることが望ましいと思われる．

これに対して，一つのアクチュエータによって並立する二つの振子を同時に倒立させる並列倒立振子システムでは，二つの振子の固有振動数が異なっておれば理論的には可制御であり，これが一致すれば不可制御になることが知られている[8)]．本論文の一つの目的は，制御性を可変にできるという観点から，この並列倒立振子システムに着目し，一つのプロトタイプを提案し，その制御性に関して検討を加え，実際に装置試作し，この系が制御可能であることを実験的に確認することにある．

一方，実験検証をするべき制御方式の一つとして，近年その有効性が注目されている H^∞制御が挙げられる．これに関しては混合感度問題を用いて倒立振子系を設計した例が報告されているが[3),4)]，混合感度問題では虚軸上の極・零点の取り扱いに際して，種々の制約条件を考慮に入れなければならないし，極零相殺を含めた種々の問題点も指摘されている[9)]．これに対して McFarlane ら[10)] が提案しているループ整形法は，設計手順も簡単で，虚軸上の極・零点に注意する必要もなく，実用的であると考えられ，その有効性を倒立振子を用いて実験検証することは意義深いと思われる．本論文のもう一つの目的は，このループ整形法の有効性を検証することにある．

本論文の構成を以下に示す．まず，**2.** で，並列倒立振子システムを提案・試作し，この系のモデル化を行う．**3.** でこの系の制御性に関して，ロバスト安定性と可制御性の二つの観点から解析を行う．**4.** で，この系に対する，ループ整形法に基づく H^∞ 補償器の具体的設計法を示し，**5.** において，振子の倒立実験を行うことにより，提案する並列振子システムが実際に制御可能であることを確認すると同時に，ループ整形法の有効性を検証する．

2. 並列倒立振子システムの試作とモデル化

本節ではまず，提案する並列倒立振子システムの概略を述べ，次にそのシステムの運動方程式を導き，状態空間表現を求める．

2.1 並列倒立振子システムの概略

1. で述べたように，ここでは，「(i) 制御性を可変にできる」という観点から，一つのアクチュエータで並立する二つの振子を同時に倒立させる並列倒立振子システム

* 原稿受付 1993. 5. 6.
** 京都大学 工学部 Kyoto University, Faculty of Engineering ; Gokasho, Uji, Kyoto 611, JAPAN
Key Words : H^∞ control, loop shaping method, inverted pendulum, two-degree-of-freedom control, robust control.

を考える．このシステムと類似した型として，古田ら[11]によって振子を二つ直列に結合した二重倒立振子システムの研究が行われているが，(i) の観点からはやや疑問が残る．また筆者らとは別に，川谷ら[12]によっても並列倒立振子システムを用いた研究が報告されているが，これは従来の倒立振子システムと同様に，振子を支える台座部分が並進型であり，その移動範囲には制限があって，これが線形理論によって安定化する際の大きな制約になることもある．よって，「(ii) 振子台座の可動距離が大きくとれる」ように，参考文献 11) に見られる回転型を基礎とした構造を採用する．このような構造にすることで，振子台座の可動距離がいくらでも大きくできるばかりでなく，駆動力伝達部の機構に存在するバックラッシュや不感帯などの非線形性の影響を小さく抑えられることが期待できる．

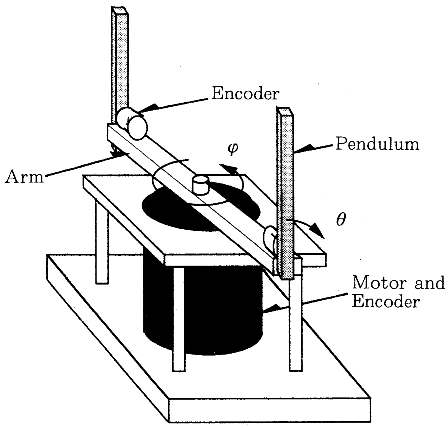

Fig. 1 Parallel inverted pendulum system

提案する倒立振子システムの概略を Fig. 1 に示す．中心にある一つのアクチュエータでアームの位置と 2 本の振子の姿勢を同時に制御するものであるが，アクチュエータとしては電流とトルクの関係が明確な DC サーボモータを，検出器には外乱の影響が少ないパルスエンコーダを用いた．エンコーダはそれぞれの振子の付け根とモータ軸に取り付けてあり，これを観測量として用いる．

2.2 システムのモデル化

1. で提案した倒立振子システムに対し運動方程式を導く．まず，このシステムに対し，モータ軸と振子の回転軸との交点を原点として水平面内に x 軸，y 軸をとり，鉛直方向上向きに z 軸をとる．θ および ϕ は，時計回り方向を正とする．ここで以下の記号を定義する．

m_i : i 番目の振子の質量 (kg)

l_{gi} : i 番目の振子の付け根から重心までの長さ (m)

θ_i : i 番目の振子の角度 (rad)

I_i : i 番目の振子の重心回りの慣性モーメント (kgm^2)

$\tilde{I}_i = I_i \sin^2\theta_i$ (kgm^2)

ϕ : アームの回転角度 (rad)

L : アームの長さ (m)

J : モータ軸のまわりのアームの慣性モーメント (kgm^2)

τ : モータのトルク (Nm)

g : 重力加速度 $=9.81$ (m/s^2)

このとき，振子の重心の座標を (x_{gi}, y_{gi}, z_{gi}) とすると x_{gi}, y_{gi}, z_{gi} は次式で表わせる．

$$x_{gi} = L\cos\phi - l_{gi}\sin\theta_i\sin\phi \qquad (1)$$

$$y_{gi} = L\sin\phi + l_{gi}\sin\theta_i\cos\phi \qquad (2)$$

$$z_{gi} = l_{gi}\cos\theta_i \qquad (3)$$

これを時間微分して，重心速度は

$$\begin{aligned} v_i^2 &= \dot{x}_{gi}^2 + \dot{y}_{gi}^2 + \dot{z}_{gi}^2 \\ &= L^2\dot{\phi}^2 + l_{gi}^2\dot{\theta}_i^2 + l_{gi}^2\sin^2\theta_i\dot{\phi}^2 + 2Ll_{gi}\cos\theta_i\dot{\theta}_i\dot{\phi} \end{aligned} \qquad (4)$$

となる．振子が傾いて回転することにより，原点回りに xy 平面上で回転のエネルギーを持つことを考慮にいれると，運動エネルギー T，ポテンシャルエネルギー U は次式で表わせる．

$$\begin{aligned} T = &\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}I_2\dot{\theta}_2^2 \\ &+ \frac{1}{2}(\tilde{I}_1 + \tilde{I}_2 + J)\dot{\phi}^2 \end{aligned} \qquad (5)$$

$$U = m_1gl_{g1}\cos\theta_1 + m_2gl_{g2}\cos\theta_2 \qquad (6)$$

これからラグランジュの運動方程式を導くと，次式のようになる．

$$\begin{aligned} &(m_1l_{g1}^2 + I_1)\ddot{\theta}_1 + m_1Ll_{g1}\cos\theta_1\ddot{\phi} \\ &\quad -(m_1l_{g1}^2 + I_1)\sin\theta_1\cos\theta_1\dot{\phi}^2 \\ &\quad -m_1gl_{g1}\sin\theta_1 = -F_1 \end{aligned} \qquad (7)$$

$$\begin{aligned} &(m_2l_{g2}^2 + I_2)\ddot{\theta}_2 + m_2Ll_{g2}\cos\theta_2\ddot{\phi} \\ &\quad -(m_2l_{g2}^2 + I_2)\sin\theta_2\cos\theta_2\dot{\phi}^2 \\ &\quad -m_2gl_{g2}\sin\theta_2 = -F_2 \end{aligned} \qquad (8)$$

$$\begin{aligned} &\{m_1L^2 + m_2L^2 + J \\ &\quad +(m_1l_{g1}^2 + I_1)\sin^2\theta_1 + (m_2l_{g2}^2 + I_2)\sin^2\theta_2\}\ddot{\phi} \\ &\quad +\{2(m_1l_{g1}^2 + I_1)\sin\theta_1\cos\theta_1\dot{\theta}_1 \\ &\quad +2(m_2l_{g2}^2 + I_2)\sin\theta_2\cos\theta_2\dot{\theta}_2\}\dot{\phi} \\ &\quad -m_1Ll_{g1}\sin\theta_1\dot{\theta}_1^2 - m_2Ll_{g2}\sin\theta_2\dot{\theta}_2^2 \\ &\quad +m_1Ll_{g1}\cos\theta_1\ddot{\theta}_1 + m_2Ll_{g2}\cos\theta_2\ddot{\theta}_2 \\ &= \tau - F_m \end{aligned} \qquad (9)$$

ただし，F_i は i 番目の振子に働く摩擦項，F_m はアーム

に働く摩擦項である．一般に摩擦は非線形項を有するが，ここでは $F_i = D_i\dot{\theta}_i + K_i$, $F_m = D_m\dot{\phi} + K_m$ と粘性摩擦項（摩擦係数 D_i, D_m）とクーロン摩擦項（K_i, K_m）の和で近似し，線形化の際には K_i, K_m を無視することにする．上記の運動方程式を平衡点回りで $\theta_1 \ll 1$, $\theta_2 \ll 1$, $\dot{\theta}_1 \ll 1$, $\dot{\theta}_2 \ll 1$, $\dot{\phi} \ll 1$ とし，2次以上の微小量を無視することで線形系が得られる．この線形化した運動方程式は状態変数 x を，

$$x = \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \phi & \dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_2 & \dot{\phi} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{10}$$

とすることで，

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{11}$$

となる状態空間表現が求まる．ただし

$$A = M^{-1}D \tag{12}$$

$$B = M^{-1}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},\ C = \begin{bmatrix} I_3 & 0 \end{bmatrix} \tag{13}$$

であり，

$$M = \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & \hat{M} \end{bmatrix} \tag{14}$$

$$\hat{M} = \begin{bmatrix} m_1 l_{g1}^2 + I_1 & 0 & m_1 L l_{g1} \\ 0 & m_2 l_{g2}^2 + I_2 & m_2 L l_{g2} \\ m_1 L l_{g1} & m_2 L l_{g2} & m_1 L^2 + m_2 L^2 + J \end{bmatrix} \tag{15}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & I_3 \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \tag{16}$$

$$D_{21} = \begin{bmatrix} m_1 g l_{g1} & 0 & 0 \\ 0 & m_2 g l_{g2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{17}$$

$$D_{22} = \begin{bmatrix} -D_1 & 0 & 0 \\ 0 & -D_2 & 0 \\ 0 & 0 & -D_m \end{bmatrix} \tag{18}$$

である．また，入力 u は

$$u = \tau \tag{19}$$

であり，観測量 y は

$$y = \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \phi \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{20}$$

となる．こうした求まった制御対象を，

$$P(s) = C(sI - A)^{-1}B \tag{21}$$

として以下これを用いる．

2.3 パラメータの同定

振子の質量や重心高さ，慣性モーメントは振子を一様な棒とみなすことで実測により容易に求めることができる．振子，モータの摩擦，およびモータの慣性モーメントは以下の同定実験によって求めた．

2.3.1 摩擦の測定

(1) 振子の場合

振子の位置エネルギーが付け根の摩擦によって消費されることに着目し，以下のように振子の摩擦の測定を行った（Fig. 2 参照）．

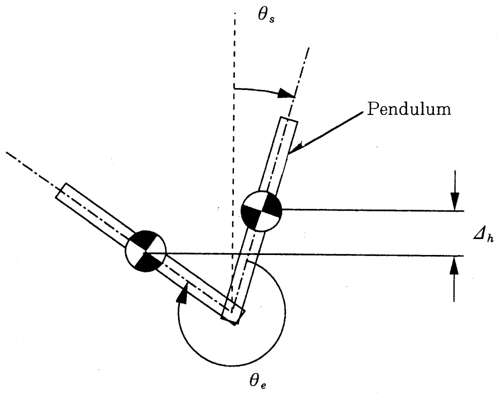

Fig. 2 Pendulum in free motion

Step 1　振子を止めた状態（状態 s とする）の角度を θ_s とし，この状態から静かに振子を動かす．

Step 2　再び振子の速度が 0 になった状態（状態 e とする）の角度 θ_e を測定する．

Step 3　それぞれの状態の角度，重心の高さの差 Δh には，

$$\begin{aligned} \Delta E = mg\Delta h &= \int_{\theta_s}^{\theta_e} (D_i\dot{\theta} + K_i)\,d\theta \\ &= D_i \int_{\theta_s}^{\theta_e} \dot{\theta}\,d\theta + K_i(\theta_e - \theta_s) \end{aligned} \tag{22}$$

の関係があり，このことから $\dot{\theta}$ の値を差分で求めることにより D_i と K_i の連立方程式が求まる．また θ_s の値を変えることで D_i, K_i の値を求めることができる．ここで ΔE はエネルギーの損失分，g は重力加速度である．

(2) モータの場合

摩擦，トルク，加速度，慣性モーメントには，

$$J\ddot{\phi} = \tau - D_m\dot{\phi} - K_m \tag{23}$$

なる関係がある．このことより τ を一定にし $\ddot{\phi} = 0$ となるときの $\dot{\phi}$ の値から D_m, K_m を求めることができる．

2.3.2 アームの慣性モーメントの測定

アームにはエンコーダなどの機器が搭載されているた

Table 1　Physical parameters

	Pendulum 1	Pendulum 2		Arm
m_i	0.128	0.1024	J	0.75
l_{gi}	0.25	0.20	L	0.51
I_i	0.00267	0.00137	D_m	1.443
D_i	1.526×10^{-4}	4.693×10^{-4}	K_m	4.978
K_i	2.486×10^{-3}	3.630×10^{-3}		

め，質量や長さだけから慣性モーメントを求めるのは難しい．そこで(23)式を利用して実験により求める．このシステムのステップ応答について，シミュレーションと実際の装置にステップトルクを加えた場合の応答を比較し，この二つが一致するように J の値を定めた．

これらの同定により求まったパラメータをTable 1に示す．

3. 並列倒立振子システムの解析

前述の並列倒立振子システムに対し，ロバスト安定度および可制御性行列の二つの方向から，その制御のしやすさを解析する．

3.1　ロバスト安定度に着目した解析

一般に次のような定理が知られている．(詳細は参考文献10)参照)

【定理1】[10]

制御対象 P の $\boldsymbol{RH}^\infty$ (安定かつプロパーな有理関数)上の正規化左既約分解($(M, N)\in\boldsymbol{RH}^\infty$)

$$P=M^{-1}N \tag{24}$$

$$M(j\omega)M(-j\omega)^{\mathrm T}+N(j\omega)N(-j\omega)^{\mathrm T}=I \tag{25}$$

が与えられたとする．M, N に対しそれぞれ変動分 Δ_m, $\Delta_n(\in\boldsymbol{RH}^\infty)$ を考え，

$$P_\Delta=(M+\Delta_m)^{-1}(N+\Delta_n) \tag{26}$$

になった場合に，P を安定化する補償器 K について，

$$\|\Phi(P, K)\|_\infty<\frac{1}{\varepsilon} \tag{27}$$

$$\Phi(P, K)=\begin{bmatrix} I \\ K \end{bmatrix}(I-PK)^{-1}\begin{bmatrix} I & P \end{bmatrix} \tag{28}$$

が成り立てば，

$$\left\|\begin{bmatrix}\Delta_m, & \Delta_n\end{bmatrix}\right\|_\infty<\varepsilon \tag{29}$$

を満たす任意の変動に対して，K は P_Δ を安定化する．

この ε の最大値を $\varepsilon_{\max}$，すなわち，

$$\min_K\|\Phi(P, K)\|_\infty<\frac{1}{\varepsilon_{\max}} \tag{30}$$

とすると，この $\varepsilon_{\max}$ は補償器 K によって許容されるモデルの誤差の最大値であり，ロバスト安定度と考えることができる．$\varepsilon_{\max}$ はシステムに固有の値であって，この値は繰り返し計算することなく求めることができる(計算法については付録参照)．この $\varepsilon_{\max}$ の値が小さければ，制御対象の小さな変動のもとで，どのような補償器を設計しても，すぐに不安定化することを意味している．モデル化誤差は，現実には必ず存在するので，$\varepsilon_{\max}$ が小さければ小さいほど，安定化する補償器を見つけることが困難となる．よってこれを制御しやすさの一つの尺度としてこのシステムの制御性を評価する．

$\varepsilon_{\max}$ を前述の並列倒立振子システムについて求め，制御のしやすさを評価する．1本の振子を50 (cm)に固定し，もう一方の振子の長さを10 (cm)から50 (cm)にまで変えたときの $\varepsilon_{\max}$ の値をFig. 3に示す．振子が極端に短い場合は現実問題として実現が不可能なので省略した．振子が1本の場合は $\varepsilon_{\max}$ が0.0113であったのに対し，振子が2本の場合は $\varepsilon_{\max}$ が最大でも0.0032となり，かなり制御が難しくなっているのがわかる．なお，ここでの1本の場合というのは，振子の長さが50 (cm)の場合の値を示している．また振子の長さが近づいて固有振動数が近づくと，$\varepsilon_{\max}$ の値が小さくなり制御がしづらくなっている様子が理解できる．

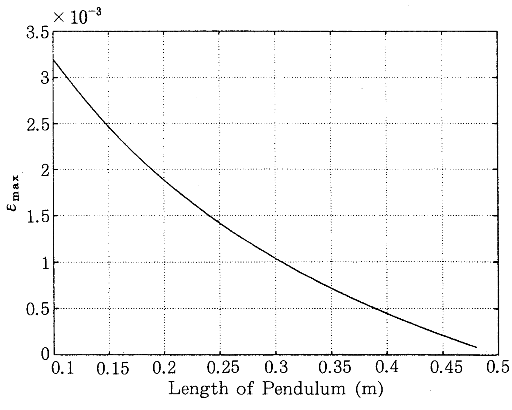

Fig. 3　Robust stabilizability index $\varepsilon_{\max}$

3.2　可制御性行列に着目した解析

一般に可制御性行列 M_c は，そのランクによってシステムの可制御性を判断するのに用いられるが，ここではその最小特異値 $\underline{\sigma}(M_c)$ を用いてシステムの制御のしやすさを評価する．並列倒立振子システムの状態空間表現(11)式から，このシステムの可制御性行列は，

$$M_c=\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^5B \end{bmatrix} \tag{31}$$

と表わせる．この最小特異値が小さくなると，ランクがお

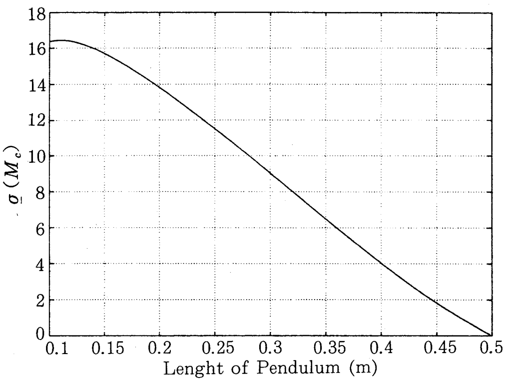

Fig. 4 Smallest singular value of controllability matrix

ちて可制御ではなくなる方向に向かうことから，$\underline{\sigma}(M_c)$ が小さいほど制御がしづらくなると考えられる．

$\varepsilon_{\max}$ の場合と同様に，1本の振子を 50 (cm) に固定し，もう一方の振子を 10 (cm) から 50 (cm) まで変えたときの $\underline{\sigma}(M_c)$ の値を Fig. 4 に示す．なお最小特異値は状態変数の取り方に依存するので，ここでは振子の振れ角とアームの回転角を比べ，安定化という面から考えると，アームの回転角ははるかに大きくても許容されることから，システムの状態変数が，

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & 0.01\phi & \dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_2 & 0.01\dot{\phi} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{32}$$

となるように，変換行列 T

$$T = \mathrm{diag}\{1 \ \ 1 \ \ 0.01 \ \ 1 \ \ 1 \ \ 0.01\} \tag{33}$$

を考え，(11) 式に対して，

$$\dot{\hat{x}} = T^{-1}AT\hat{x} + T^{-1}B\tau \tag{34}$$

$$y = CT\hat{x} \tag{35}$$

となるような相似変換を施した後に解析を行った．振子が1本の場合に，同様の比率の相似変換を施してから求めた最小特異値が 25.6 であったのに対し，Fig. 4 から，2本の場合は最大でも 16.3 であり制御が難しくなっているのがわかる．また，振子の長さが近づくと，$\underline{\sigma}(M_c)$ は小さくなり制御がしにくくなっている様子が理解できる．

以上のことから，並列倒立振子システムはその制御のしやすさが容易に変えられることが理解でき，制御則の実験検証には有効な装置であると考えられる．

4. ループ整形法による補償器の設計

本節では，ループ整形法の概略について述べたあと，並列倒立振子システムに対して，アームの位置制御と振子の安定化を目的とした補償器を設計する．

4.1 ループ整形法

補償器の設計に際しては，近年注目されている H^{∞} 制御の手法を用いることにする．**1.** で述べたように，これに関しては混合感度問題を用いて倒立振子系を設計した例が報告されているが，混合感度問題では虚軸上の極・零点の取り扱いに際して，種々の制約条件を考慮に入れなければならないし，種々の問題点も指摘されている[9]．そこで，ここでは，実用的な設計法と期待される McFarlane and Glover のループ整形法を用いて設計する．

ループ整形法では以下の手順で補償器を求める，

(i) まず直列補償器 W_1, W_2 を P の前後につなぎ，開ループ系の周波数特性を整形し，これを新たな制御対象 $\hat{P}$ とみなす．

(ii) (28) 式において，$\|\Phi(\hat{P}, \hat{K})\|_{\infty}$ を最小化する $\hat{K}$ を求める．

(iii) $K = W_1\hat{K}W_2$ とする．

この方法の考え方は極めて単純で，開ループで周波数整形した後 (W_1, W_2)，安定性を保証する ($\hat{K}$) というものであり，利用が簡単で実用的と思われる．この方法の利点としては，(a) 重み関数 W_1, W_2 の役割が明確，(b) P の入出力数に関係なく設計できる．(c) 虚軸上の極や零点を気にする必要がない，などがあげられる．とくに，最後の点は積分系を扱ったり，サーボ系などにおいて積分型補償器を設計するのに大きな利点となる．また，混合感度問題では，P の出力端での感度関数や相補感度関数のみを評価しているので，P の条件数によっては入力端での感度や相補感度関数が非常に悪化する恐れがあるが，ループ整形法においてはそのような問題が少ないことも指摘されている[10]．

4.2 補償器の設計

先に述べた並列倒立振子システムにおいては，振子の重心位置が高い方が制御しやすく，また二つの振子の固有振動数の差を大きくし可制御性を良くするために，振子に重りを付けることで，制御をしやすくした．このことによる結果として，線形化の際に無視したクーロン摩擦項の影響も小さくすることが期待される．この重りを付けた場合の振子の各パラメータは，

$$m_1 = 0.2150, \quad m_2 = 0.1894 \tag{36}$$

$$l_{g1} = 0.3512, \quad l_{g2} = 0.1081 \tag{37}$$

となる．なお，この値は重りの付いた振子を一つの振子として，その重心位置と質量を表わしており，ここに表わされていない他のパラメータについては，Table 1 と同様である．結果として，制御対象は次のようになった．

$$P=\frac{1}{d(s)}\begin{bmatrix}P_1 & P_2 & P_3\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{38}$$

ただし，

$$P_1=-1.52\,s^2(s+6.56)(s-6.53)$$
$$P_2=-2.85\,s^2(s+4.77)(s-4.77)$$
$$P_3=1.28(s+4.77)(s-4.77)(s+6.56)(s-6.53)$$
$$d(s)=s(s+1.62)(s+4.97)(s-4.87)(s+6.73)\times(s-6.63)$$

である．

この制御対象に対し，アームの位置制御と振子の安定化を目的として，Fig.5 に示す2自由度補償器[13]を設計するものとした．ここで，N, D は制御対象の右既約分解の対であり，

$$P=ND^{-1}(N,\ D\in \boldsymbol{RH}^{\infty}) \tag{39}$$

である．このとき，r から y への伝達関数は NF となるので，フィードフォワード補償器 F は目標値応答の観点から定め，フィードバック補償器 K は安定化，ロバスト性の観点からループ整形法によって以下の手順で定める．

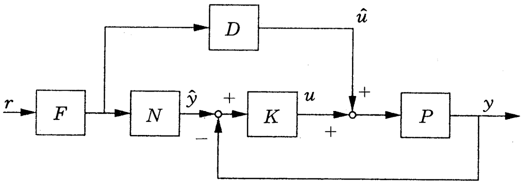

Fig. 5　Two-degree-of-freedom control system

4.2.1　F の設計

ここでは，N, D をつぎのように定めた．

$$D(s)=\frac{d(s)}{f(s)} \tag{40}$$

$$N(s)=\frac{1}{f(s)}\begin{bmatrix}N_1(s) & N_2(s) & N_3(s)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{41}$$

ただし，

$$f(s)=(s+6.56)(s+6.53)(s+4.78)(s+4.77)\times(s+3+i)(s+3-i)$$
$$N_1(s)=-1.52\,s^2(s+6.56)(s-6.53)$$
$$N_2(s)=-2.85\,s^2(s+4.78)(s-4.77)$$
$$N_3(s)=1.28(s+6.56)(s-6.53)(s+4.78)\times(s-4.77)$$

とする．F は，次数を小さくすることと，アーム位置の定常偏差を零にするため，$N(0)F=[0,\ 0,\ 1]^{\mathrm{T}}$ を満たす定数として定めた．

4.2.2　K の設計

つぎに，フィードバック補償器 K を **3.** の方法により設計する．直列補償器 W_1, W_2 を次の仕様のもとに選んだ．

（i）コントローラに積分器を付ける．

また何度かの実験から安定化には次のことが必要と判断した．

（ii）開ループ伝達関数 $\hat{K}W_2PW_1$ 特異値線図の交差周波数が 10^2 (rad/s) を越えない．

（iii）周波数が 10^0 (rad/s) から 10^1 (rad/s) の帯域で W_2PW_1 のゲインが $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$, $\hat{\phi}$ ともほぼ同じ大きさになるようにする．

ここで $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$, $\hat{\phi}$ とは $\hat{y}$ の成分であり，$\hat{y}$ は W_2PW_1 の出力を表わしている．（ii）は，高周波で開ループのゲインをあげると発振が起こってしまうため，それを防ぐことを目的としており，（iii）は，アームに比べ振子の重みを大きくすることで $\varepsilon_{\max}$ を大きくすることは可能であるが，そうすることでアームへの重みがさがり，アームの位置が制御しにくくなってしまうので，これを防ぐことを目的としている．

以上のことから重みは以下のように定めた．

$$W_1=1 \tag{42}$$

$$W_2=\mathrm{diag}\left\{400,\quad 200,\quad \frac{1000\,(s+0.3)^2}{s\,(s+10)}\right\} \tag{43}$$

このときの $\varepsilon_{\max}$ の値は 0.022 であった．また，このときのコントローラ K の伝達関数は以下のようになった．

$$K=\frac{1}{d_K(s)}\begin{bmatrix}K_1 & K_2 & K_3\end{bmatrix} \tag{44}$$

ただし，

$$K_1=1.21\times10^6 s(s+10)(s+8.70)(s+4.78)(s+3.85)\times(s+0.309)(s+0.292)(s+z_1)(s+\bar{z}_1)$$
$$K_2=9.98\times10^5 s(s+10)(s+7.21)(s+6.56)(s+2.74)\times(s+0.312)(s+0.289)(s+z_2)(s+\bar{z}_2)$$
$$K_3=-8.18\times10^4(s-112.1)(s+45.6)(s+10)\times(s+5.61)(s-2.32)(s+0.3)^2(s+z_3)(s+\bar{z}_3)$$
$$d_K(s)=s(s+10)(s+9.38)(s+5.65)(s+p_1)(s+\bar{p}_1)\times(s+p_2)(s+\bar{p}_2)(s+p_3)(s+\bar{p}_3)$$
$$z_1=29.2+27.9i,\ z_2=27.4+26.8i,\ z_3=0.178+0.106i$$
$$p_1=121+85i,\ p_2=2.43+2.17i,\ p_3=0.296+0.0288i$$

である．

参考までに，このときの W_2PW_1, KP の特異値線図を Fig.6 に，このコントローラのゲイン線図を Fig.7 に示す．

5. 実　験

本節では上述した補償器により，並列倒立振子の安定化実験を行い，提案する並列倒立振子システムの実用性

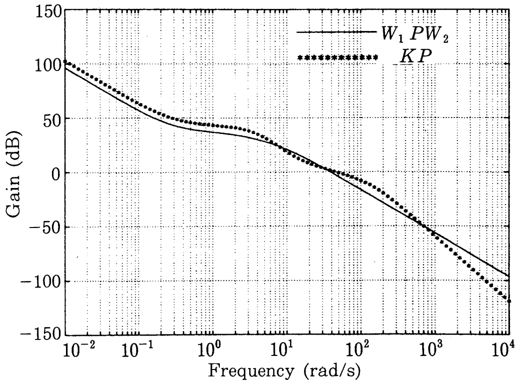

Fig. 6 Specified and achieved loop shapes

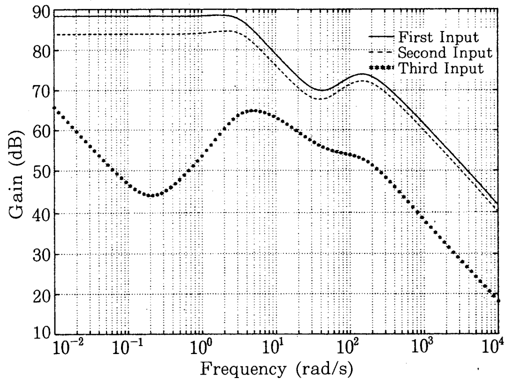

Fig. 7 H^{∞} controller gain

の検証を行うとともに，**4.** の設計法の有効性を検証する．

5.1 実験装置の概略

実験装置の概略図を Fig. 8 に示す．また，モータ・エンコーダの仕様を Table 2 示す．なお，カウンタ・D/A 変換器は 12 bit のものを用い，振子のエンコーダは 4 倍モードにして 24,000 パルス/周として用いた．またサンプル時間は 1 (ms) である．

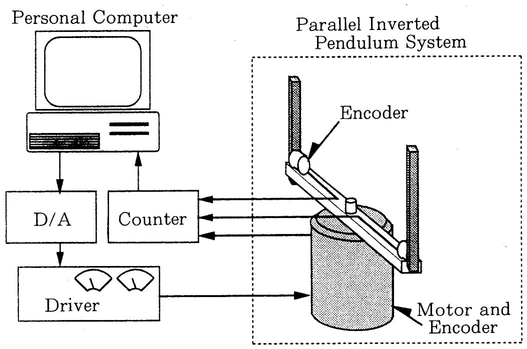

Fig. 8 Configuration of the system

Table 2 Actuator and sensor spec.

Motor	Harmonic Drive RH−25
Rated Output	68 (W)
Torque Constant	10.05 (Nm/A)
Gear Ratio	1 : 50
Encoder	1000 (p/r)
Encodor	IHI RK−6000
Standard Output Pulses	6000 (p/r)

5.2 実験結果と考察

まず，ステップ目標値に対する出力応答の実験結果を Fig. 9 に示す．目標値 $\hat{\phi}$ は時刻 t に対し，

$$\hat{\phi} = -40° \ (0 \leq t < 20,\ 40 \leq t < 60)$$
$$= 40° \ (20 \leq t < 40,\ 60 \leq t \leq 80)$$

としている．この図より，振子の倒立姿勢を維持したまま，アームが所定の位置まで回転していることがわかる．次に目標値を零として，初期偏差を与えた場合の出力応答を Fig. 10 に示す．ここではアームの回転角度 ϕ を初期状態で $\phi = 3°$ としている．この場合にも振子はいっ

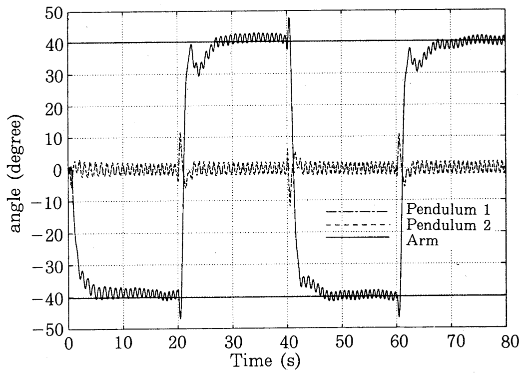

Fig. 9 Step response (proposed method)

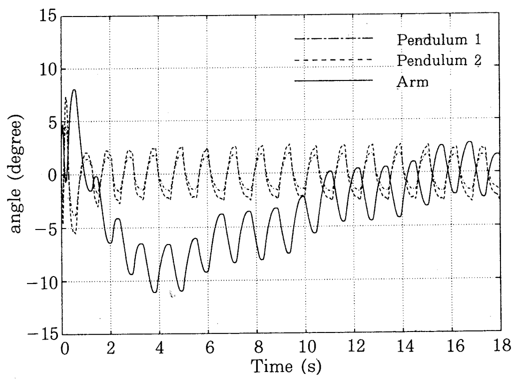

Fig. 10 Initial condition response (proposed method)

たん6°ほどふれるが，倒立姿勢を維持し，アームも原点にもどろうとする様子が読みとれる．

これらの実験結果において，最終的に小さな振動が残っているが，同様の現象はクーロン摩擦を考慮した非線形シミュレーションによっても確認しており，クーロン摩擦を無視した場合には定常状態における振動はなくなることから，この影響と思われる．

また比較のため，LQ 最適制御によって補償器を設計した場合の実験を行った．ここでは (11) 式で表わせるプラントに対し，評価関数 J を

$$J=\int_0^\infty (x^{\mathrm{T}}Qx+u^{\mathrm{T}}Ru)dt \tag{45}$$

ここで，

$$Q=\mathrm{diag}\{2.0\times10^5,\ 6.0\times10^5,\ 1.8\times10^5,\ 1,\ 1,\ 0.1\} \tag{46}$$

$$R=8 \tag{47}$$

と定めて，これを最小にするように状態フィードバックゲインを求め，状態量がすべて観測できないため，オブザーバを用いて構成した．ここではオブザーバ極は，すべて -60 とした．これらの値は，何度かの実験の試行錯誤により最も倒立状態の良好なものから定めた．このときの初期値応答の実験結果を Fig. 11 に示す．先の Fig. 10 と比較すると，補償器に積分器がないため位置偏差が生じている．またクーロン摩擦の影響がより大きく現れ，最終的な微小振動が大きいことから，ループ整形に比べあまり低感度化されていないと思われる．

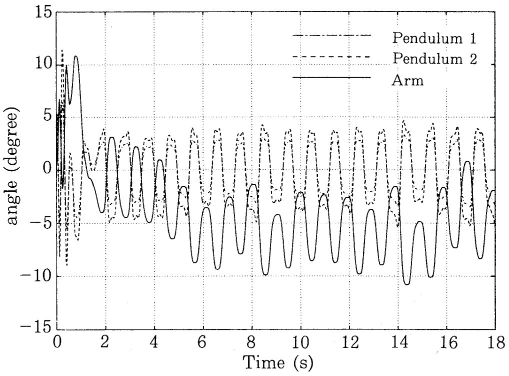

Fig. 11　Initial condition response (LQ optimal method)

以上のことから，この提案した並列倒立振子システムの実用性が証明できたとともに，ループ整形法に基づく H^∞ 制御則の有効性が検証できたと考える．

6. おわりに

本論文では制御のしやすさが変えられる制御対象という観点から並列倒立振子システムに着目し，一つのプロトタイプを提案し，実際に装置試作した．そして，この系の制御の容易さに関して，ロバスト安定性，可制御性の観点から解析した上で，このシステムが制御可能であることを実験的に確認した．さらに，このシステムに対して，ループ整形法による H^∞ 制御則を用いた 2 自由度系を設計し，LQ 最適制御による補償器との比較を含めて，この制御手法の有効性を振子の倒立実験により検証した．

参考文献

1)　平木，杉江，井上，木村：結合倒立振子の一入力による安定化制御；第 21 回自動制御連合講演会前刷，pp. 185～186 (1978)
2)　井手，浜田，大松：ファジィ制御による倒立振子の安定化について；第 30 回システム制御情報学会研究発表講演会講演論文集，pp. 213～214 (1991)
3)　石田，我如古：倒立振子の H^∞ 制御実験；第 20 回制御理論シンポジウム資料，pp. 255～260 (1991)
4)　梶原，小管，古田：傾斜されたレール上の二重倒立振子の位置制御；計測自動制御学会論文集，Vol. 15, No. 7, pp. 873～879 (1979)
5)　T. Furuta, M. Yamakita and S. Kobayashi : Swing Up Control of Inverted Pendulum ; Proc. of IECON '91, pp. 2193～2198 (1991)
6)　池田，壷内：ゴム空気圧ロボットによる倒立振子の制御；システム/制御/情報，Vol. 3, No. 3, pp. 76～83 (1990)
7)　佐伯：LTR 法とその倒立振子への適用；システム/制御/情報，Vol. 35, No. 5, pp. 260～267 (1991)
8)　T. Kailath : Linear Systems, Prentice-Hall, pp. 103～105 (1980)
9)　J. Sefton and K. Glover : Pole/Zero Cancellations in the General H^∞ Ploblem with Reference to Two Blok Design ; System and Control Letters 14, pp. 295～306 (1990)
10)　D. C. McFarlane and K. Glover : Robust Controller Design Using Normalized Coprime Factor Plant Description, Lecture Notes in Control and Information Sciences, No. 138, Springer-Verlag (1990)
11)　T. Furuta, M. Yamakita, S. Kobayashi and M. Nishiyama : A New Inverted Pendulum Apparatus for Education ; Proc. of IFAC Control Education Conference 91, pp. 191～196 (1991)
12)　川谷，山口：並列型 2 重倒立振子系の解析と安定化；計測自動制御学会論文集，Vol. 29, No. 5, pp. 572～580 (1993)
13)　前田，杉江：アドバンスト制御のためのシステム制御理論，朝倉書店 (1990)

付　録

P の最小実現を $(A,\ B,\ C)$ とするとき，

$$\|\Phi(P,\ K)\|_\infty<\frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Phi(P,\ K):=\begin{bmatrix} I \\ K \end{bmatrix}(I-PK)^{-1}\begin{bmatrix} I & P \end{bmatrix}$$

を満たす一つの安定化補償器 K と ε の最大値 $\varepsilon_{\max}$ は次の手順で計算できる（詳細は参考文献 10)）．

Step 1　次式の Riccati 方程式の正定対称解 X, Z を計算する．

$$A^{\mathrm{T}}X+XA-XBB^{\mathrm{T}}X+C^{\mathrm{T}}C=0$$
$$AZ+ZA^{\mathrm{T}}-ZC^{\mathrm{T}}CZ+BB^{\mathrm{T}}=0$$

Step 2　$\varepsilon_{\max}$ を次式により求める．

$$\varepsilon_{\max}=(1+\lambda_{\max}(ZX))^{-\frac{1}{2}}$$

Step 3　$\varepsilon_{\max}>\varepsilon$ ならば，一つの $K(s)$ は次式で与えられる．

$$K(s)=C_K(sI-A_K)^{-1}B_K$$

ただし，

$$A_K=A-BB^{\mathrm{T}}X+\varepsilon^{-2}W_a^{-\mathrm{T}}ZC^{\mathrm{T}}C$$
$$B_K=\varepsilon^{-2}W_a^{-\mathrm{T}}ZC^{\mathrm{T}},\quad C_K=B^{\mathrm{T}}X$$
$$W_a:=I+(XZ-\varepsilon^{-2}I)$$

である．